Les solutions sont : $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{7})}$; $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

b) $e^{2i\frac{\pi}{7}}$ est une solution de (E)

$\Rightarrow 1+e^{2i\frac{\pi}{7}}+e^{4i\frac{\pi}{7}}+e^{6i\frac{\pi}{7}}+e^{8i\frac{\pi}{7}}+e^{10i\frac{\pi}{7}}+e^{12i\frac{\pi}{7}}=0$

$\Rightarrow \text{Re}(1+e^{2i\frac{\pi}{7}}++e^{4i\frac{\pi}{7}}+e^{6i\frac{\pi}{7}}+e^{8i\frac{\pi}{7}}+e^{10i\frac{\pi}{7}}+e^{12i\frac{\pi}{7}})=0$

$\Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0$

$\Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos(2\pi-\frac{6\pi}{7})+\cos(2\pi-\frac{4\pi}{7})+\cos(2\pi-\frac{2\pi}{7})=0$

$\Rightarrow 1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}=0$

$\Rightarrow 1+2\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=0$

$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$

EX 24 :

1) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b).\sum_{k=0}^{n}a^k.b^{n-k}$

D'où $1-z^{n+1}=(1-z)\sum_{k=0}^{n}1^k.z^{n-k}=(1-z)\left[z^n+z^{n-1}+.....+z+1\right]$

2)

$1-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}.e^{i\frac{\theta}{2}}=-e^{i\frac{\theta}{2}}\left[e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right]=-e^{i\frac{\theta}{2}}\left[2i\sin\frac{\theta}{2}\right]$ D'après les Formules d'Euler.

D'où $1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$

3) $n\geq 1; \theta\neq 2k\pi; k\in\mathbb{Z}$

$S=1+\cos\theta+\cos2\theta+.....+\cos n\theta$ et $S'=1+\sin\theta+\sin2\theta+.....+\sin n\theta$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn